ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ N 303

1. В одном ящике 8 белых и 12 красных шаров, в другом ящике 10 белых, 5 черных и 5 красных шаров. Из первого переложили неизвестный шар во второй, а затем из второго достали два шара.

а) В какую теоретическую схему “укладывается" эта задача?

б) Записать соответствующую расчетную формулу и пояснить смысл входящих в нее величин.

в) Какие значения для данного условия принимают величины, входящие в указанную выше формулу?

г) Какова вероятность того, что оба шара черные.

Решение.

а) Если событие A может произойти только при выполнении одного из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события A вычисляется по **формуле полной вероятности.**

б) По условию из первого переложили неизвестный шар во второй, тогда возможны два случая: 1) переложили белый шар; 2) переложили красный шар. Применима формула полной вероятности $P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)$.

Событие A = «Из второго ящика достали два черных шара» (из г)).

Гипотезы: H_1= «Во второй ящик переложили из первого белый шар».

H_2= «Во второй ящик переложили из первого красный шар».

$P(A)$ - вероятность события А, $P(H_1)$, $P(H_2)$ - вероятности гипотез, $P(A|H_1)$, $P(A|H_2)$ - условные вероятности события А, при условии что имели место гипотезы H_1, H_2.

в) Всего в первом ящике имеется 8+12=20 шаров, тогда вычислим вероятности гипотез $P(H_1)=\frac{8}{20}=0,4$, $P(H_2)=\frac{12}{20}=0,6$.

Вычислим условные вероятности события А.

Если имела место гипотеза H_1, то во втором ящике стало 10+1=11 белых, 5 черных и 5 красных шаров, всего 11+5+5=21, значит $P(A|H_1)=\frac{5}{21}$.

Если имела место гипотеза H_2, то во втором ящике стало 10 белых, 5 черных и 5+1=6 красных шаров, всего 10+5+6=21, значит $P(A|H_2)=\frac{5}{21}$.

г) Вычислим $P(A)=0,4\cdot\frac{5}{21}+06\cdot\frac{5}{21}=\frac{5}{21}\approx 0,2381$.

Ответ: а) формула полной вероятности,

б) $P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)$,

в) $P(H_1)=0,4$, $P(H_2)=0,6$, $P(A|H_1)=\frac{5}{21}$, $P(A|H_2)=\frac{5}{21}$,

г) $\frac{5}{21}\approx 0,2381$.

2. Монета подбрасывается N раз, герб выпадает n раз.

а) В какую теоретическую схему “укладывается" эта задача?

б) Записать соответствующую расчетную формулу и пояснить смысл входящих в нее величин $N=8$,$n=4$.

в) Найти вероятность того, что при $N=80$ герб выпадет $n=40$ раз; герб выпадет от 30 до 50 раз.

г) Какое число выпадений герба наиболее вероятно и почему?

Решение.

а) Имеем повторение испытаний. Вероятность появления события – появления герба в каждом эксперименте постоянна и равна $p=\frac{1}{2}=0,5$. Тогда имеем схему Бернулли (это биномиальное распределение).

б) *Формула Бернулли* определяет вероятность появления ровно m раз события A в серии из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p:

$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, где $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, $p=0.5$ - вероятность появления герба, $q=0.5$ - вероятность противоположного события.

По условию $n=N=8$, $k=4$, тогда вычислим

$$P_8(4)=C_8^4 p^4 q^{8-4}=\frac{8!}{4!4!}\cdot 0.5^4 0.5^4=$$

$$=\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 0.0625\cdot 0.0625=0.2734375$$

в) Найдем вероятность того, что при $N=80$ герб выпадет $n=40$ раз.

Количество испытаний $N=80$ велико и применение формулы Бернулли в данном случае проблематично (сложно вычислить количество сочетаний C_{80}^{40} и вероятности 0.5^{40}).

Если вероятность p появления случайного события A в каждом испытании постоянна, то вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие A наступит ровно m раз, приближённо равна:
$P_n(m)\approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x)$, где $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $\phi(x)$ - функция Лапласа, ее значения табличны.

Найдем вероятность того, что при $N=80$ испытаний успех имели в 40 из них.

$$x=\frac{40-80\cdot 0,5}{\sqrt{80\cdot 0,5\cdot 0,5}}=\frac{0}{4.4721}=0,\ \phi(0)=0.3989,$$

Тогда $P_{80}(40)=\frac{0,3989}{4,4721}=0.0892$.

Найдем вероятность того, что при $N=80$ герб выпадет от 30 до 50 раз.

Вероятность того, что в N испытаниях событие наступит не менее k_1 и не более k_2 раз находится по формуле:

$P_N(k_1 < k < k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x')$, где $\Phi(x)$- функция Лапласа, ее значения определяются с помощью таблицы.

$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, тогда

$x' = \frac{30 - 80 \cdot 0,5}{\sqrt{80 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = \frac{-10}{4.4721} \approx -2,2366$, $x'' = \frac{50 - 80 \cdot 0,5}{\sqrt{80 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = \frac{10}{4.4721} \approx 2,2366$.

Учитывая, что функция Лапласа нечетная получим:

$P_{80}(30 \le k \le 50) = \Phi(x'') - \Phi(x') = \Phi(2,2366) - \Phi(-2,2366) = 2 \cdot \Phi(2,2366) =$
$= 2 \cdot 0,4873 = 0,9746$.

г) Наиболее вероятное число успехов k при биномиальном распределении (схема Бернулли) определяется из неравенства с учетом, что k-целое число.

$Np - q \le k \le Np + q$, а поскольку $p = q = 0.5$ находим

$0.5(N-1) \le k \le 0.5(N+1)$.

Тогда для $N = 8$ вычислим $0.5(8-1) \le k_0 \le 0.5(8+1)$, $3.5 \le k_0 \le 4.5$, значит $k_0 = 4$, для $N = 80$ вычислим $0.5(80-1) \le k_1 \le 0.5(80+1)$, $39.5 \le k_1 \le 40.5$, значит $k_1 = 40$.

Ответ: а) схема Бернулли,

б) $P_8(4) = 0.2734375$,

в) $P_{80}(40) = 0.0892$, $P_{80}(30 \le k \le 50) = 0.9746$,

г) для произвольного N: $0.5(N-1) \le k \le 0.5(N+1)$, для $N = 8$- $k_0 = 4$, для $N = 80$- $k_1 = 40$.

3. СВ ξ равномерно распределена на отрезке $[-2,1]$. Найти плотность вероятности СВ $\eta = |\xi|$. Построить график функции f_η.

Решение.

Запишем функцию плотности распределения для случайной величины ξ, равномерна распределенной на отрезке $[-2,1]$: $f_{\xi}(x)=¿\{\frac{1}{1-(-2)}=\frac{1}{3}, x\in[-2,1], ¿¿¿¿$.

Функция $\eta=|\xi|$ не монотонна на отрезке $[-2,1]$.

При $\xi\in[-2,0]$ имеем $\eta=-\xi$ она строго убывает, а при $\xi\in[0,1]$ находим $\eta=\xi$ - строго возрастает.

Применим формулу $g(\eta)=f(\phi(\eta))\cdot|\phi'(\eta)|$, где $\xi=\phi(\eta)$ - обратная функция к $\eta=|\xi|$.

При $\xi\in[-2,0]$ находим, что $\xi=\phi(\eta)=-\eta$, тогда $\phi'(\eta)=-1$, причем $\eta\in[0,2]$, значит $g_1(\eta)=f(\phi(\eta))\cdot|\phi'(\eta)|=\frac{1}{3}\cdot|-1|=\frac{1}{3}$.

При $\xi\in[0,1]$ находим что $\xi=\phi(\eta)=\eta$, тогда $\phi'(\eta)=1$, причем $\eta\in[0,1]$, значит $g_2(\eta)=f(\phi(\eta))\cdot|\phi'(\eta)|=\frac{1}{3}\cdot|1|=\frac{1}{3}$.

По правилу $g(\eta)=g_1(\eta)+g_2(\eta)$ определяем, что при $\eta\in[0,1]$ $g(\eta)=g_1(\eta)+g_2(\eta)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, а при $\eta\in(1,2]$ $g(\eta)=g_2(\eta)=\frac{1}{3}$.

Обобщая полученные данные, найдем что $f_{\eta}(x)=¿\{\frac{2}{3}, x\in[0,1], ¿\{\frac{1}{3}, x\in(1,2], ¿¿¿¿$

Построим график найденной функции.

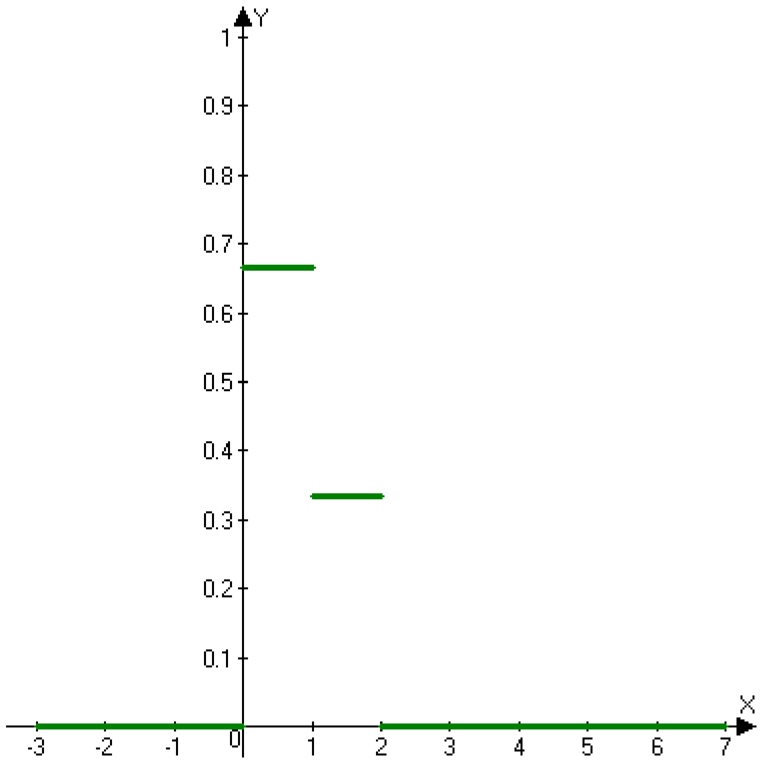

Рис.1.

Ответ: $f_{\eta}(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}, x\in[0,1],\\ \frac{1}{3}, x\in(1,2],\end{cases}$, рис.1.

4. Задана двумерная СВ (ξ,η):

Таблица 1.

$\eta\backslash\xi$	-1	0	1
-1	1/8	1/12	7/12
1	5/24	1/6	1/8

Найти а) безусловные законы распределения и центр,

б) условный закон распределения η при $\xi=0$ и, в) условное матожидание,

г) распределение $\eta\cdot\xi$

Решение.

Заданное распределение не является совместным законом распределения СВ $\{\xi, \eta\}$, поскольку сумма всех вероятностей равна

$\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{7}{12}+\frac{5}{24}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{3+2+14+5+4+3}{24}=\frac{31}{24}\neq 1$, заметим, что если вместо $\frac{7}{12}$ (при η=-1 и ξ=1) положить $\frac{7}{24}$, то получим $\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{7}{24}+\frac{5}{24}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{3+2+7+5+4+3}{24}=\frac{24}{24}=1$.

Все дальнейшие расчеты будем производить для совместного распределения (иначе не получим ряды распределения)

Таблица 2.

$\eta \backslash \xi$	-1	0	1
-1	1/8	1/12	7/24
1	5/24	1/6	1/8

Для того, что бы найти безусловный закон распределения ξ выполним сложение вероятностей по столбцам.

Таблица3.

ξ	-1	0	1
P_i	1/8+5/24=1/3	1/12+1/6=1/4	7/24+1/8=5/12

Для того, что бы найти безусловный распределения η выполним сложение вероятностей по строкам.

Таблица 4.

η	-1	1
P_i	1/8+1/12+7/24=1/2	5/24+1/6+1/6=1/2

Вычислим математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$.

$M\xi = -1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{5}{12}=\frac{5}{12}-\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$,

$M\eta = -1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=0$.

Центр распределения: $\xi=\frac{1}{12}$, $\eta=0$.

Б) найдем условный закон распределения η при $\xi=0$.

В таблице 3 найдено $P(\xi=0)=\frac{1}{4}$.

Условный закон распределения случайной величины η при условии, что $\xi=0$, найдем применяя формулу $P(\eta=\eta_i|\xi=0)=\frac{P(\eta=\eta_i,\xi=0)}{P(\xi=0)}$ тогда

$P(\eta=-1|\xi=0)=\frac{1}{12}:\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$, $P(\eta=1|\xi=0)=\frac{1}{6}:\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$

То есть

Таблица 5.

$\eta/\xi=0$	-1	1
P_i	1/3	2/3

в) Найдем условное математическое ожидание

$M(\eta|\xi=0)=-1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

г) Найдем закон распределения СВ распределение $\zeta=\eta\cdot\xi$.

Вычислим все возможные произведения и запишем их вероятности

$\zeta_1=-1\cdot(-1)=1$, $p_1=\frac{1}{8}$, $\zeta_2=-1\cdot0=0$, $p_2=\frac{1}{12}$, $\zeta_3=-1\cdot1=-1$, $p_3=\frac{7}{24}$,

$\zeta_4=1\cdot(-1)=-1$, $p_4=\frac{5}{24}$, $\zeta_5=1\cdot0=0$, $p_{35}=\frac{1}{6}$, $\zeta_6=1\cdot1=1$, $p_6=\frac{1}{8}$.

Объединим одинаковые значения и вычислим $P(\zeta=-1)=\frac{7}{24}+\frac{5}{24}=\frac{1}{2}$,

$P(\zeta=0)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$, $P(\zeta=1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$.

Таблица 6.

$\zeta=\eta\cdot\xi$	-1	0	1
P_i	1/2	1/4	1/4

Ответ: заданное распределение не является законом распределения, рассматриваем распределение из таблицы 2.

а) таблица3, таблица 4, центр $\xi=\frac{1}{12}$, $\eta=0$.

б) таблица 5, в) $M(\eta|\xi=0)=\frac{1}{3}$, г) таблица 6.

5. Распределение СВ в выборке определяется следующим интервальным рядом распределения.

Таблица 7.

3,0-3,6	3,6-4,2	4,2-4,8	4,8-5,4	5,4-6,0	6,0-6,6	6,6-7,2
2	8	35	43	22	15	5

а) построить гистограмму и найти оценки мат ожидания и дисперсии.

б) Как проверить гипотезу о нормальном законе распределения при уровне значимости $\alpha=0,05$.

Решение.

а) Построим гистограмму частот заданного ряда распределения, отметив на оси абсцисс – интервалы распределения, а на оси ординат их частоты и построим прямоугольники.

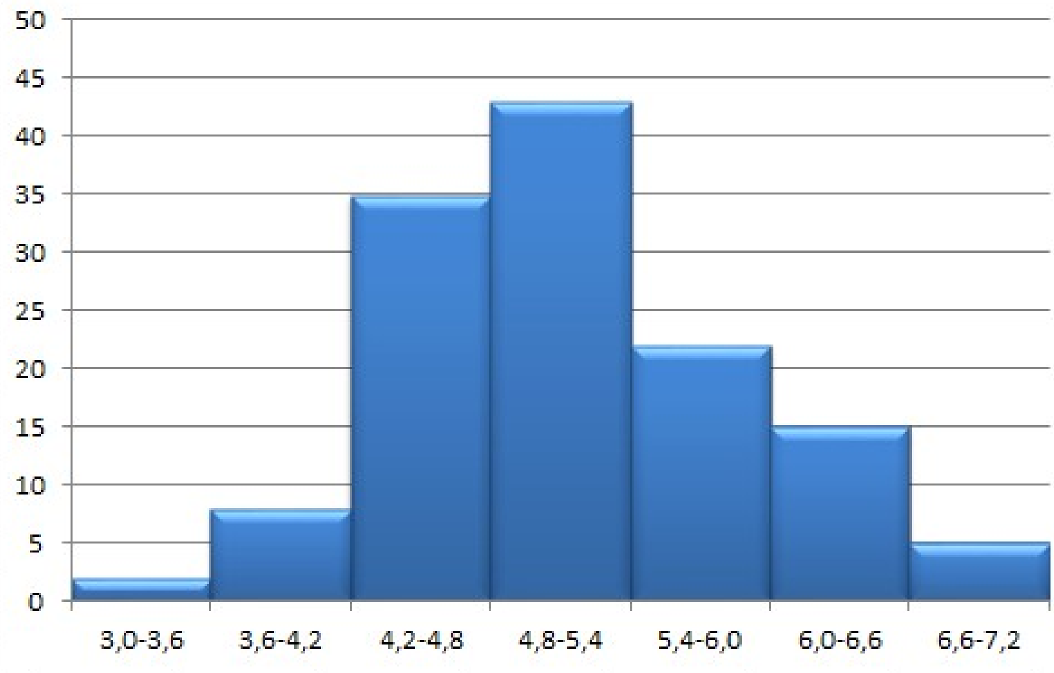

Рис.1. Полигон частот.

Что бы найти оценки мат ожидания и дисперсии перейдем к вариационному ряду, взяв в качестве вариант середины интервалов.

Таблица 8.

X	3.3	3.9	4.5	5.1	5.7	6.3	6.9
N	2	8	35	43	22	15	5

Объем выборки $n=\sum_i n_i=2+8+35+43+22+15+5=130$.

Выборочное среднее

$$\overline{x}_в=\frac{1}{n}\sum_i x_i n_i=\frac{3,3\cdot 2+3,9\cdot 8+4,5\cdot 35+5,1\cdot 43+5,7\cdot 22+6,3\cdot 15+6,9\cdot 5}{130}=$$

$$=\frac{669}{130}=5,1462$$.

Выборочная дисперсия $D_в=\overline{x^2}-\left(\overline{x}_в\right)^2=\frac{1}{n}\sum_i x_i{}^2 n_i-5,1462^2=$

$$=\frac{3,3^2\cdot 2+3,9^2\cdot 8+4,5^2\cdot 35+5,1^2\cdot 43+5,7^2\cdot 22+6,3^2\cdot 15+6,9^2\cdot 5}{130}-26,4829=$$

$$=\frac{3518,82}{130}-26,4829=0,585$$

б) Критерием согласия называется критерий поверки гипотезы о предполагаемом законе распределения. В соответствии с критерием Пирсона сначала вычисляется величина $\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$,

где $n_i' = \frac{nh}{s} \phi(u_i)$ - теоретические частоты, $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Лапласа, значения которой табулированы и приводятся в таблицах.

Вычислим теоретические частоты, учитывая, что:

$n = 130$, h =0,6 (ширина интервала), $\overline{x}$ = 5,1462, $\sigma^2 = 0,585$, $\sigma =$ 0,7648.

Сравним эмпирические и теоретические частоты.

Таблица 9.

i	n_i	u_i	ϕ_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
1	2	-2.4138	0,0213	2.172	0.1723	0.02968	0.0137
2	8	-1.6293	0,1057	10.78	2.7798	7.7274	0.717
3	35	-0.8448	0,278	28.352	-6.6482	44.198	1.559
4	43	-0.06035	0,398	40.59	-2.41	5.8079	0.143
5	22	0.7242	0,3056	31.167	9.1666	84.027	2.696
6	15	1.5087	0,1276	13.013	-1.9867	3.947	0.303
7	5	2.2932	0,0283	2.886	-2.1138	4.4682	1.548
$\sum$	130			130			6,98

Определим границу критической области. Так как статистика Пирсона измеряет разницу между эмпирическим и теоретическим распределениями, то чем больше ее наблюдаемое значение $\chi^2_{набл}$, тем сильнее довод против основной гипотезы.

Поэтому критическая область для этой статистики всегда правосторонняя: [$\chi^2_{набл}$;+∞).

Её границу $\chi_{кр}{}^{2}(\alpha,\text{k-r-1})$ находим по таблицам распределения χ^2 и заданным значениям α, $k = 7,\ r=2$ (параметры $\overline{x}$ и s оценены по выборке).

$\chi_{кр}{}^{2}$ (0.05;4) = 9,48773; $\chi^{2}{}_{набл}$ = 6.98

Наблюдаемое значение статистики Пирсона не попадает в критическую область: $\chi^{2}{}_{набл} < \chi_{кр}{}^{2}(\alpha,\text{k})$, поэтому нет оснований отвергать основную гипотезу. Это позволяет утверждать, что опытные данные на заданном уровне значимости $\alpha = 0,05$ не противоречат гипотезе о нормальном законе распределения, или опытные данные согласуются с выдвинутой гипотезой.

Ответ: а) рис.1, математическое ожидание - выборочное среднее $5,1462$, выборочная дисперсия 0,585.

б) опытные данные согласуются с выдвинутой гипотезой.